5 - практикалық сабақ

Анықталған интеграл.

1. Интегралдық қосынды. Анықталған интеграл.

Ньютон – Лейбниц формуласы

Мысал 2.

$$\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{8}{3}.$$

Мысал 3. $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ есепте.

► $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx = \int_0^8\sqrt{2x}dx + \int_0^8\sqrt[3]{x}dx = \frac{1}{2}\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^8 + \frac{x^{4/3}}{4/3}\Big|_0^8 = \frac{1}{3}(16)^{3/2} + \frac{3}{4}(8)^{4/3} = 33\frac{1}{3}.$ ◄

Мысал 4. $\int_0^{\pi/2} sin^3\varphi d\varphi$ тап.

► $\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi d\varphi = -\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)d(\cos\varphi) = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$ ◄

4. Анықталған интегралда айнымалыны ауыстыру

Мысал5. $\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$ интегралын есептелік, ол үшін $x = \sin t$ белгілеуін енгіземіз:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx = \left|x = \sin t, dx = \cos tdt; (x=0) \Rightarrow (\sin t = 0) \Rightarrow (t=0); (x=1) \Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow (\sin t = 1) \Rightarrow \left(t = \frac{\pi}{2}\right)\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Бұл интеграл центрі координат басында, бірінші квадрантта жататын радиусы бірге тең дөңгелектің ауданының төрттен бір бөлігіне тең.

Мысал 6. $\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$ интегралын есепте.

►Мынадай белгілеу енгізелік $\sqrt{1+x} = t$. Онда $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Егер $x = 3$ болса, онда $t = 2 = \alpha$, ал егер $x = 8$ болса, онда $t = 2 = \alpha$.

Бұдан,

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = \int_2^3\frac{\left(t^2-1\right)2tdt}{t} = 2\int_2^3\left(t^2-1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3}.$$ ◄

Мысал 7. Есепте: $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2cos\,x + 3}.$

► $tg(x/2) = u$ белгілеуін енгіземіз, онда $\cos x = \left(1-u^2\right)/\left(1+u^2\right)$, $dx = 2du/\left(1+u^2\right)$, $\alpha = tg0 = 0$, $\beta = tg(\pi/4) = 1$.

Бұдан,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2\cos x+3}=\int_0^1\frac{2du/(1+u^2)}{2(1-u^2)/(1+u^2)+3}=\int_0^1\frac{2du}{u^2+5}=\frac{2}{\sqrt5}arctg\frac{u}{\sqrt5}\bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt5}arctg\frac{1}{\sqrt5}\approx$$

$\approx 0{,}38.$ ◀

5. Анықталған интегралда бөліктеп интегралдау әдісі

Мысал 8.

$$\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e \ln x d\frac{x^2}{2}=\left|u=\ln x, du=\frac{1}{x}dx, v=\frac{x^2}{2}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\bigg|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{e^2}{2}\ln e-0-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\bigg|_1^e=\frac{e^2}{2}-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

Мысал 9. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$ есепте.

► $$\int_0^{\pi/2}x\cos x dx=\begin{vmatrix}u=x, & du=dx,\\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=x\sin\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\sin x dx=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-0+\cos x\Big|_0^{\pi/2}=$$

$=\frac{\pi}{2}-1.$ ◀

Мысал 10. $\int_1^e x\ln^2 x dx$ тап.

► $$\int_1^e x\ln^2 x dx=\begin{vmatrix}u=\ln^2 x, & du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx,\\ dv=xdx, & v=\frac{1}{2}x^2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}x^2\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e x\ln x dx=\begin{vmatrix}u=\ln x, & du\frac{1}{x}dx,\\ dv=xdx, & v=\frac{1}{2}x^2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{1}{2}x^2\frac{1}{2}dx\right)=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{1}{4}x^2\Big|_1^e=\frac{1}{4}\left(e^2-1\right).$$ ◀

Анықталған интегралдарды есепте.

1. $\int_1^2\left(2x^2+\frac{2}{x^4}\right)dx.$ $\left(Жауабы: \frac{21}{4}.\right)$
2. $\int_1^4\sqrt{x}dx.$ $\left(Жауабы: \frac{14}{3}.\right)$
3. $\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$ $(Жауабы: 2.)$
4. $\int_0^1\frac{dx}{x^2+4x+5}.$ $\left(Жауабы: arctg3-arctg2=arctg\frac{1}{2}\approx 8^0\frac{\pi}{180^0}\approx 0{,}14.\right)$
5. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx.$ $\left(Жауабы: \frac{4}{3}.\right)$
6. $\int_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$ $(Жауабы: 2-\ln 2\approx 1{,}31.)$
7. $\int_1^{\sqrt3}x^5\sqrt{1+x^2}dx.$ $\left(Жауабы: \frac{848}{105}.\right)$

8. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$ $\qquad$ $(Жауабы:\ \pi.)$

9. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$ $\qquad$ $\left(Жауабы:\ ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.\right)$

10. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$ $\qquad$ $\left(Жауабы:\ \frac{1}{5}ln112.\right)$

6. Өз бетімен шығаруға арналған есептер

Анықталған интегралды есепте.

1. $а)\int_1^4\left(2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx;$ $\qquad$ $б)\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx.$ $\qquad$ $(Жауабы:\ а)\,2;\quad б)\,7+2\,ln\,2.)$

2. $а)\int_4^9\left(\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\right)dy;$ $\qquad$ $б)\int_0^4\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}.$ $\qquad$ $(Жауабы:\ а)\,23/2;\quad б)\,16/3-2\,ln\,3.)$

3. $а)\int_1^4\left(\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^3}\right)dx;$ $\qquad$ $б)\int_4^9\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx.$ $\qquad$ $(Жауабы:\ а)\,3/16;\quad б)\,3+4\,ln\,2.)$

Қолданылған оқулықтар:

1. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика I. ШҚМТУ, 2008
2. Хисамиев Н.Г. Тыныбекова С.Д. Конырханова А.А. Математика II. ШҚМТУ, 2008
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1,2 М.:Наука, 2011г.
4. ЖҮТ Айдос Е.Ж. Жоғары математика. 1,2,3 бөлім Бастау, 2008

5 Сборник ИДЗ по высшей математике. Под редакцией Рябушко А.П., ч.1,2,3 Минск, «ВШ», 2011г.